



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
AN ȘCOLAR 2024 – 2025
ETAPA LOCALĂ
08.02.2025

CLASA a VIII – a

BAREM

Subiectul I

$$a^2 + b^2 - 2b + 1 = a^2 + (b - 1)^2 = 2(b - 1)^2 \dots\dots\dots 2p$$

$$a^2 + b^2 - 6b - 4a + 13 = (a - 2)^2 + (b - 3)^2 = 2(b - 3)^2 \dots\dots\dots 2p$$

$$b - 1 \geq 0, \quad b - 3 \leq 0 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$|b - 1|\sqrt{2} + |b - 3|\sqrt{2} = b\sqrt{2} - \sqrt{2} - b\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \quad \dots\dots\dots 2p$$

Subiectul II

a) $x, y, z \in \left[1, \frac{4}{3}\right] \Rightarrow 1 \leq x \leq \frac{4}{3} \Rightarrow 3 \leq 3x \leq 4 \Rightarrow -4 \leq -3x \leq -3 \dots\dots\dots 1p$

$$0 \leq 4 - 3x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{4 - 3x} \leq 1(*) \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{În mod analog } 0 \leq \sqrt{4 - 3y} \leq 1 \text{ și } 0 \leq \sqrt{4 - 3z} \leq 1 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Înmulțind relațiile cu } y, z, x \Rightarrow 0 \leq y\sqrt{4 - 3x} \leq y \leq \frac{4}{3}, 0 \leq z\sqrt{4 - 3y} \leq z \leq \frac{4}{3}, 0 \leq x\sqrt{4 - 3z} \leq x \leq \frac{4}{3}$$

$$\text{și însumându-le, obținem inegalitatea } \dots\dots\dots 1p$$

b) Dacă relațiile (*) și analoagele ei le înmulțim cu yz, zx , respectiv cu xy și le adunăm

$$\Rightarrow 0 \leq xy\sqrt{4 - 3z} + yz\sqrt{4 - 3x} + zx\sqrt{4 - 3y} \leq xy + yz + zx \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Justificarea relației } xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Finalizare} \dots\dots\dots 1p$$



Subiectul III

G_1 centrul de greutate al triunghiului ACD $\Rightarrow \frac{DG_1}{G_1N} = 2$ și G_2 centrul de greutate al triunghiului ABC $\Rightarrow \frac{BG_2}{G_2N} = 2 \Rightarrow \frac{DG_1}{G_1N} = \frac{BG_2}{G_2N} \Rightarrow G_1G_2 // DB$ 2p

Dacă $MN \cap G_1G_2 = \{F\}$, în $\triangle BMN$, $FG_2 // BM \Rightarrow \triangle NFG_2 \sim \triangle NMB \Rightarrow \frac{FG_2}{BM} = \frac{NG_2}{NB} = \frac{1}{3} \Rightarrow FG_2 = \frac{BM}{3} = \frac{1}{3}(DB - DM) = \frac{1}{3}\left(DB - \frac{2}{5}DB\right) = \frac{1}{5}DB$ 2p

$FG_2 // DM \Rightarrow \triangle EFG_2 \sim \triangle EMD \Rightarrow \frac{EG_2}{ED} = \frac{FG_2}{DM} \Rightarrow \frac{EG_2}{ED} = \frac{\frac{1}{5}DB}{\frac{2}{5}DB} = \frac{1}{2}$ 1p

G_1 centrul de greutate al triunghiului ACD $\Rightarrow \frac{NG_1}{G_1D} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{EG_2}{ED} = \frac{NG_1}{G_1D} \Rightarrow EG_1 // NG_2$ 1p
 $(ABC) \cap NG_2, G_1 \notin (ABC) \Rightarrow EG_1 // (ABC)$ 1p

Subiectul IV

a) FS, FT și ST sunt diagonale ale fețelor cubului, deci sunt congruente, adică $\triangle FST$ este echilateral 1p

Latura cubului fiind l , obținem $FS = FT = ST = l\sqrt{2}$, de unde 1p

$P_{\triangle FST} = 3 l\sqrt{2}$ și 1p

$A_{\triangle FST} = \frac{(l\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{2l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{2}$ 1p

b) Drumul cel mai scurt parcurs de furnică se poate afla desfășurând cubul astfel încât fețele laterale să fie

în același plan 1p

Distanța căutată este ipotenuza unui triunghi dreptunghic ale cărui catete sunt de lungime $4l$ și l , deci

lungimea ei va fi $l\sqrt{17}$ 1p

Înlocuind, vom obține că furnica va parcurge $\frac{2025\sqrt{17}}{17} \cdot \sqrt{17} \text{ cm} = 2025 \text{ cm}$ 1p